

## Teoretická část - 6.1.2021

1. (a) Napište definice funkce spojité v bodě a funkce spojité na intervalu (2 body).
- (b) Napište definice globálního maxima a globálního minima (1 bod).
- (c) Zformulujte a dokažte větu o existenci extrémů na intervalu (3 body).
- (d) Rozhodněte, zda existuje funkce  $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  spojitá na  $(0, 3]$  taková, že nenabývá ani globálního maxima, ani globálního minima na  $(0, 3]$ . Zdůvodněte (2 body).

2. (a) Napište definice dělení intervalu, normy dělení a zjemnění dělení (3 body).
- (b) Nechť  $D^*$  je dělení intervalu  $[0, 10]$  s dělicími body  $0, 1, 4, 7, 10$ . A nechť  $D^{**}$  je ekvidistantní dělení intervalu  $[0, 10]$  se šesti dělicími body (včetně krajních). Jaké jsou hodnoty  $|D^*|$  a  $|D^{**}|$ ? (2 body).
- (c) Nechť  $\mathfrak{D}$  je množina všech dělení intervalu  $[0, 10]$ , která jsou zjemněním  $D^*$  i  $D^{**}$  z bodu (b), rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
- pro všechna  $D \in \mathfrak{D}$  platí  $|D| \geq 1$ ,
  - pro všechna  $D \in \mathfrak{D}$  platí  $|D| \leq 1$ ,
  - pro všechna  $D \in \mathfrak{D}$  platí  $|D| \geq 2$ ,
  - pro všechna  $D \in \mathfrak{D}$  platí  $|D| \leq 2$ ,
  - existuje  $D \in \mathfrak{D}$ , že  $|D^{**}| < |D| < |D^*|$ .
- Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Napište definice konvexní a konkávní funkce (2 body).  
(b) Pomocí vhodné věty z přednášky dokažte, že funkce  $\arctan x$  je konkávní na intervalu  $(0, \infty)$  (2 body).  
(c) Zformulujte Jensenovu nerovnost a s její pomocí dokažte, že platí

$$3 \arctan \frac{7}{3} \geq \arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 4$$

(2 body).

- (d) Existuje funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konkávní na  $\mathbb{R}$  pro kterou platí, že  $f^2$  je konvexní na  $\mathbb{R}$  a  $f^3$  není ani konvexní, ani konkávní na  $\mathbb{R}$ ? (2 body).